Dio teorije

§ 6. Definicija plohe i jednadžba plohe

6.1. Definicija

Plohom zovemo podskup $S \subset E^3$ koji se može zadati na jedan od ova dva načina:

a)
$$S = \{(x, y, z) \in E^3 : \; F(x, y, z) = c\}, \tag{1}$$

gdje je $F: E^3 \to \mathbf{R}$ diferencijabilna funkcija takva da je $\mathrm{d}F \neq 0$.

b)
$$S = \{(x, y, z) \in E^3 : z = f(x, y)\}, \tag{2}$$

gdje je $f: D \to \mathbf{R}$ diferencijabilna funkcija, D otvoren i povezan skup u ravnini.

Pretpostavimo da podskup $S \subset E^3$ dopušta prikaz u obliku:

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v), \tag{3}$$

tj. neka vrijedi:

$$S = \{(x, y, z) \in E^3 : \; x = x(u, v), \; y = y(u, v), \; z = z(u, v)\}, \tag{4}$$

gdje su $x, y, z : D \to \mathbf{R}$ diferencijabilna obostrano jednoznačna (ili 1–1) preslikavanja, D otvoren i povezan skup u E^2, takva da za funkciju:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\,\vec{i} + y(u, v)\,\vec{j} + z(u, v)\,\vec{k} \tag{5}$$

vrijedi:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}. \tag{6}$$

Tada je S ploha u smislu navedene definicije.

Uvjet (6), tj. $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ znači da je rang matrice:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \tag{7}$$

jednak dva.

6.2. Jednadžba plohe. Karta plohe S. Parametrizacija od S

Jednadžbu:

$$F(x, y, z) = c \tag{8}$$

zovemo *implicitnom jednadžbom plohe,* jednadžbu:

$$z = f(x, y) \tag{9}$$

eksplicitnom jednadžbom plohe, jednadžbe:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{10}$$

zovemo parametarskim jednadžbama plohe, a jednadžbu:

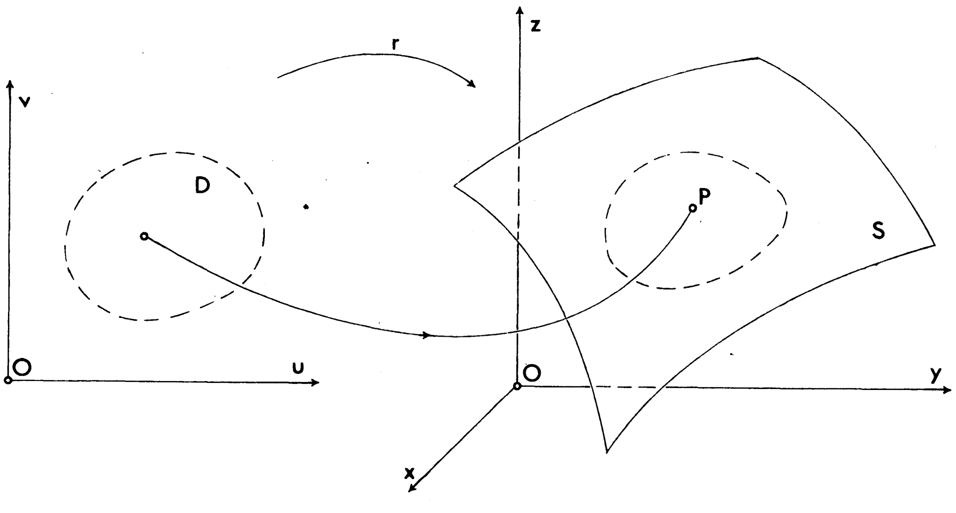
$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\,\vec{i} + y(u, v)\,\vec{j} + z(u, v)\,\vec{k} \tag{11}$$

zovemo *vektorskom jednadžbom plohe.*

Svaka ploha ne mora dopuštati prikaz u obliku (3). Naprimjer, sfera ne dopušta takav prikaz (vidi zad. 204). Međutim oko svake točke plohe postoji okolina koja dopušta takav prikaz (sl. 25). U tom slučaju jednadžbe (3) zovu se *kartom te okoline.* Ako ploha u cijelosti dopušta kartu (3) onda takvu plohu zovemo *jednostavnom plohom.*

Naglasimo još jednom da je jednostavnu plohu moguće prekriti jednom jedinom kartom (3).

Ako je S ploha za koju postoje funkcije (3), gdje su $x, y, z : D \to \mathbf{R}$ diferencijabilne funkcije (ne zahtijeva se obostrana jednoznačnost), D je otvoren (ili zatvoren) i povezan skup u E^2, koje zadovoljavaju uvjet (7), onda za jednadžbe (3) kažemo da predstavljaju *parametrizaciju plohe S.*



Sl. 25.

Singularna točka parametrizacije je ona točka u kojoj nije ispunjen uvjet (6), tj. ona točka parametrizacije za koju vrijedi:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}. \tag{12}$$

Singularne točke parametrizacije obično se isključuju iz razmatranja.

6.3. Krivolinijske ili Gaussove koordinate na plohi

Neka je ploha zadana jednadžbama (3) ili (5). Damo li parametru v konstantnu vrijednost $v = C$, a parametar u mijenjamo, onda je preslikavanje $u \to \vec{r}(u, C)$ neka krivulja na plohi. Ta krivulja se zove *u-krivulja* (parametarska u-crta) i njena je jednadžba:

$$x = x(u,\ C), \qquad y = y(u,\ C), \qquad z = z(u,\ C),$$

ili

$$\vec{r}(u,\ C) = x(u,\ C)\ \vec{i} + y(u,\ C)\ \vec{j} + z(u,\ C)\ \vec{k}. \tag{13}$$

Analogno, damo li parametru u konstantnu vrijednost $u = C$, preslikavanje $v \to \vec{r}(C,\ v)$ je *v-krivulja* (parametarska v-crta) na plohi.

Njena je jednadžba:

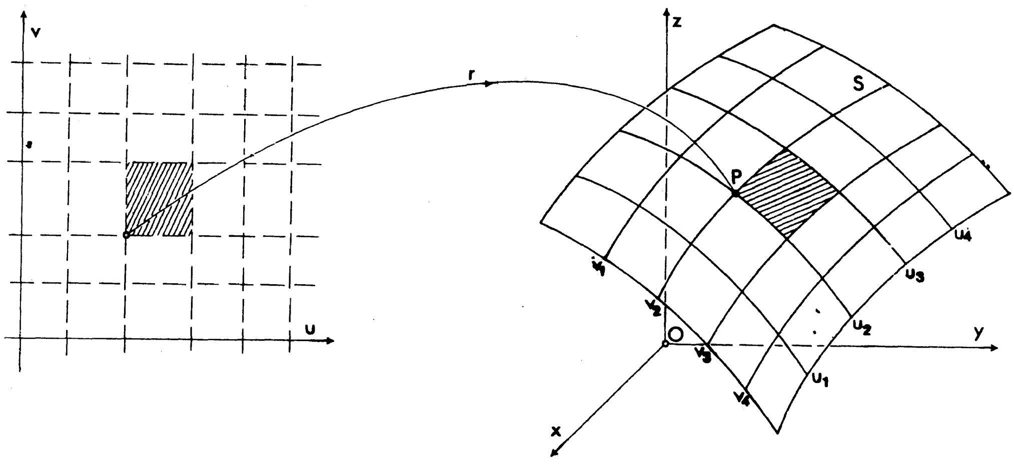
$$x = x(C,\ v), \qquad y = y(C,\ v), \qquad z = z(C,\ v),$$

ili

$$\vec{r}(C,\ v) = x(C,\ v)\ \vec{i} + y(C,\ v)\ \vec{j} + z(C,\ v)\ \vec{k}. \tag{14}$$

Na taj način dobijemo na plohi S dvije familije krivulja (vidi sl. 26).

Svakom točkom plohe prolazi po jedna krivulja iz svake od tih familija. U tom se slučaju brojevi $u = u_{\text{i}}$, $v = v_{\text{j}}$ zovu *krivolinijske ili nutarnje ili Gaussove koordinate* točke P.



Sl. 26.

6.4. Krivulje na plohi

Neka je zadana funkcija $\alpha: I \to S$, gdje je I otvoren interval, a S ploha. Funkciju α zvat ćemo *krivuljom na plohi S,* ako je α diferencijabilna funkcija. Ako je još ploha S dana svojom vektorskom jednadžbom:

$$\vec{r}(u, v) = \{x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)\}, \qquad (u, v) \in D,$$

$D \subseteq E^2$ je otvoren skup, onda krivulja α na plohi dopušta prikaz:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t),\ v(t)), \qquad t \in I, \tag{15}$$

gdje su $u = u(t)$, $\quad v = v(t)$ diferencijabilne funkcije $u,\ v: I \to \mathbf{R}$.

Jednadžba (15) se zove *vektorska jednadžba krivulje* α *na plohi* S. To je krivulja u smislu definicije krivulje u § 3.

Parametarske u- i v-crte specijalan su slučaj krivulja na plohi.

Izabrani zadaci za vježbu
(iz lekcije "Definicija povši i jednačine površi")

203. Zadana je sfera svojom implicitnom jednadžbom:

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+(z-c_3)^2=r^2,$$

gdje je $C=(c_1, c_2, c_3)$ središte sfere, a r polumjer.
Dokažite da je sfera ploha.

Najprije, funkcija:

$$F\equiv(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+(z-c_3)^2=r^2$$

je diferencijabilna. Treba još pokazati da je $\mathrm{d}F\neq 0$.

Imamo:

$$\mathrm{d}F=2(x-c_1)\,\mathrm{d}x+2(y-c_2)\,\mathrm{d}y+2(z-c_3)\,\mathrm{d}z.$$

Ovo može biti nula samo za $x=c_1$, $y=c_2$, $z=c_3$ istovremeno.
To bi značilo da je točka $C=(c_1, c_2, c_3)$ na sferi, što nije ispunjeno. Uvijek je, dakle, $\mathrm{d}F\neq 0$, pa je sfera ploha.

U zadacima od 204. do 210. zadan je skup S svojom jednadžbom oblika $F(x, y, z)=c$ ili $z=f(x, y)$.

1° Ispitati da li je S ploha.
2° Naći za S neku kartu, odnosno parametrizaciju.
3° Naći geometrijsko značenje parametara.

204. S je sfera: $x^2+y^2+z^2=r^2$.

1° U zad. 203. pokazali smo da je to ploha.
2° Ploha S dopušta kartu:

$$\vec{r}(u, v)=u\,\vec{i}+v\,\vec{j}+\sqrt{r^2-u^2-v^2}\,\vec{k}, \tag{16}$$

koordinatne funkcije te karte su diferencijabilna, obostrano jednoznačna preslikavanja, D je otvoren skup, tj. $D = \{(u, v) : u^2 + v^2 < r^2\}$. Treba pokazati da je $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$.

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial \sqrt{r^2 - u^2 - v^2}}{\partial u} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial \sqrt{r^2 - u^2 - v^2}}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{-u}{\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}} \\ 0 & 1 & \dfrac{-v}{\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}} \end{vmatrix},$$

dakle je $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$.
To je karta oko svake točke na gornjoj polusferi.
Analogno bi se pokazalo da svaka točka donje polusfere dopušta kartu:

$$\vec{r}(u, v) = u\,\vec{i} + v\,\vec{j} - \sqrt{r^2 - u^2 - v^2}\,\vec{k}, \tag{17}$$

pa zatim za desnu i lijevu polusferu, te prednju i stražnju polusferu.

3° Parametarske u-krivulje jesu kružnice paralelne s koordinatnom XOZ ravninom, a v-krivulje jesu kružnice paralelne s koordinatnom YOZ ravninom.

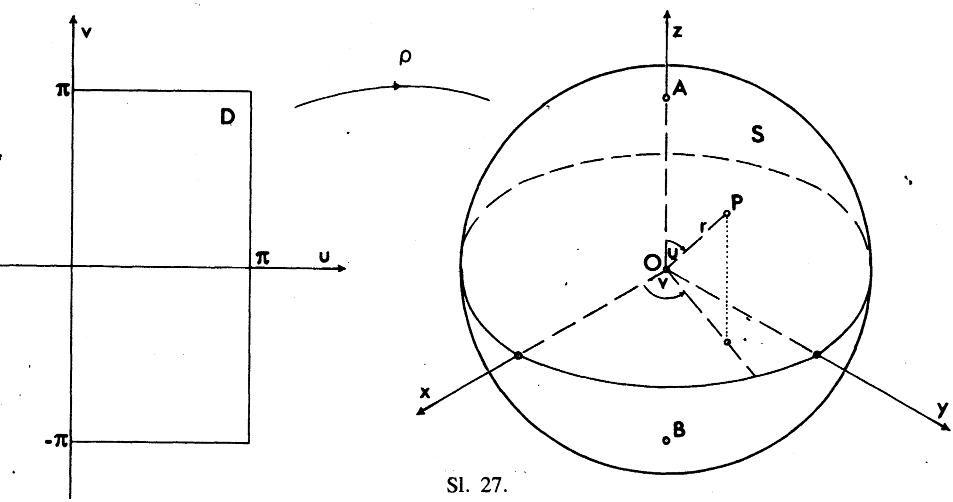
Ad 2° Odaberimo parametrizaciju $[0, \pi] \times [-\pi, \pi] \to E^3$ zadanu sa:

$$\begin{aligned} x &= r \sin u \cos v \\ y &= r \sin u \sin v \\ z &= r \cos u, \end{aligned} \tag{18}$$

što se piše još i ovako:

$$\vec{r}(u, v) = \{r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u\}. \tag{19}$$

To je preslikavanje ϱ zatvorenog skupa D na S, tj. $\varrho : D \to S$ (vidi sl. 27).



Sl. 27.

(18) nije parametrizacija čitavog skupa S, jer se sa sfere mora izuzeti sjeverni pol $A=(0, 0, r)$ i južni pol $B=(0, 0, -r)$ (radi uvjeta (6)). Trebamo, dakle, promatrati skup:

$$S \setminus \{\text{sjeverni, južni pol}\}. \tag{20}$$

Skup (20), međutim, dopušta parametrizaciju (18), drugim riječima (18) je parametrizacija za skup (20).

Osim toga (18) nije karta (jer (18) nije 1–1 preslikavanje, D nije otvoren skup), a kamoli da bi (18) bila karta koja bi prekrila cijelu sferu. Sfera, dakle, nije jednostavna ploha.

Ad 3° Koordinatne u-krivulje ($v=\text{const.}$) *su meridijani,* a v – krivulje ($u=\text{const.}$) *paralele.* Geometrijski, dva parametra u i v znače Gaussove koordinate i to *geografsku širinu* (u) i *geografsku dužinu* (v).

Parametrizacija (18) se dosta koristi u kartografiji.

Pokažimo još da je za sve točke skupa (20) $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$.

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r\cos u\cos v & r\cos u\sin v & -r\sin u \\ -r\sin u\sin v & r\sin u\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\sin^2 u\cos v\ \vec{i} + r^2\sin^2 u\sin v\ \vec{j} + r^2\sin u\cos u\ \vec{k}.$$

Par $(u, v)=(0, 0)$ preslikava se u sjeverni pol $A=(0, 0, r)$, a par $(u, v)=(\pi, 0)$ u južni pol $B=(0, 0, -r)$. Kako su te točke ionako isključene iz skupa (20), to nećemo uzimati u obzir $u=0$, $u=\pi$, niti $v=0$. Dakle je $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ uvijek $\neq \vec{0}$ jer je za $u \in (0, \pi)$ uvijek $\sin u \neq 0$, a $\cos v$ i $\sin v$ ne mogu iščezavati za isti v.

Pravokutnik $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [-\pi, \pi]$ preslikava se na gornju polusferu, a pravokutnik $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \times [-\pi, \pi]$ na donju polusferu (vidi sl. 27).

Budući da je u sjevernom i južnom polu $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \vec{0}$ (uvjet (12)), to su sjeverni i južni pol *singularne točke* parametrizacije (18) pa bi se te točke i zbog toga isključile iz razmatranja. Geometrijski se singularnost očituje time, što se u sjevernom i južnom polu sastaju *svi meridijani.* Svim točkama skupa (20) inače prolaze samo po jedna paralela i po jedan meridijan (vidi zadatke 266, 272, 323).

205. S je rotacioni elipsoid (vidi sl. 28):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Razmatranja su analogna onima sa sferom iz zad. 204.

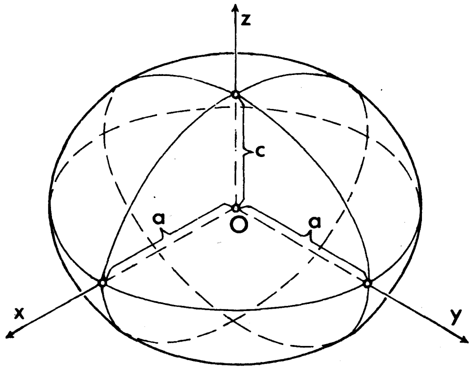
Jednadžbe:

$$\begin{aligned} x &= a\sin u\cos v \\ y &= a\sin u\sin v \\ z &= c\cos u \end{aligned}$$

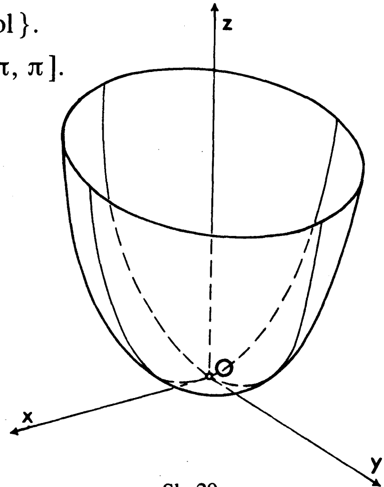
predstavljaju parametrizaciju skupa:

$$S \setminus \{\text{sjeverni, južni pol}\}.$$

Pritom je $D=[0, \pi]\times[-\pi, \pi]$.



Sl. 28.



Sl. 29.

206. S je rotacioni paraboloid (vidi sl. 29):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=z.$$

S je ploha, jer je z diferencijabilna funkcija.

Promotrimo preslikavanje $r: D \to E^3$ dano sa:

$$\vec{r}(u, v)=\left\{u, v, \frac{1}{a^2}(u^2+v^2)\right\}, \text{ gdje je } D=E^2.$$

Ovo preslikavanje je karta koja je preslikavanje na, pa je rotacioni paraboloid *jednostavna ploha*.

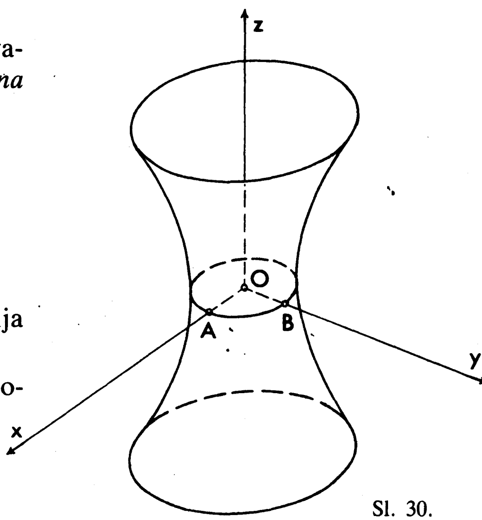
Jednadžbama:

$$x = a\,u\cos v$$
$$y = a\,u\sin v$$
$$z = u^2,$$

gdje je $D=R\times[0,2\pi]$, je dana parametrizacija $D\to S$ plohe S.

207. Ploha S je jednoplošni rotacioni hiperboloid (vidi sl. 30):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$



Sl. 30.

S je ploha, jer je F diferencijabilna funkcija i jer je $\mathrm{d}\,F \neq 0$.

Jednadžbama:

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v$$
$$y = a \operatorname{ch} u \sin v$$
$$z = c \operatorname{sh} u$$

je dana parametrizacija
$D \rightarrow S$, $D = R \times [0, 2\pi]$, plohe S. S nije jednostavna ploha.

208. S je dvoplošni rotacioni hiperboloid (vidi sl. 31):

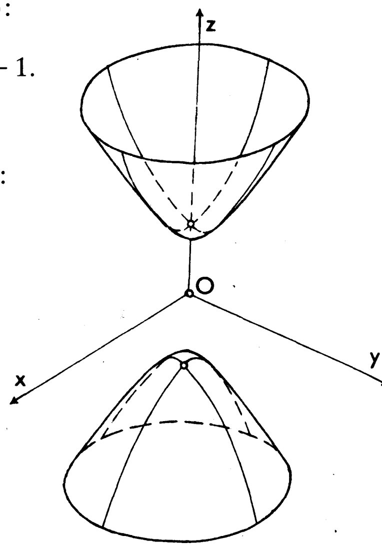
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

S je ploha, jer je F diferencijabilno i $\mathrm{d}\,F \neq 0$.

Ploha S dopušta parametrizaciju $D \rightarrow S$ danu sa:

$$x = a \operatorname{sh} u \cos v$$
$$y = a \operatorname{sh} u \sin v$$
$$z = c \operatorname{ch} u,$$

gdje je $D = R \times [0, 2\pi]$.
S nije jednostavna ploha.
U zadacima 206, 207. i 208. koordinatne u- i v-linije jesu meridijani i paralele na plohi, a geometrijski par brojeva (u, v) znače Gaussove koordinate.



Sl. 31.

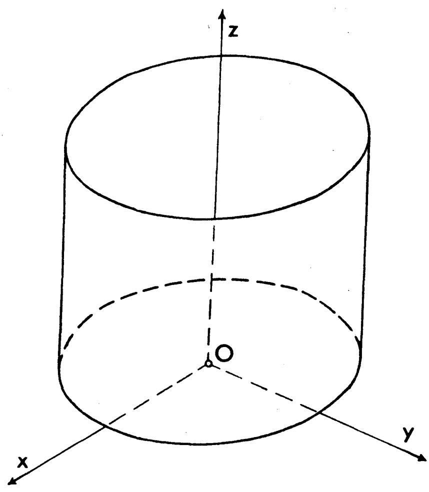
209. S je kružni valjak (vidi sl. 32):

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

S dopušta parametrizaciju $D \rightarrow S$ danu sa:

$$x = r \cos v$$
$$y = r \sin v$$
$$z = u,$$

pritom je $D = R \times [0, 2\pi]$.
S nije jednostavna ploha.



Sl. 32.

210. S je kružni stožac (vidi sl. 33):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

Skup:

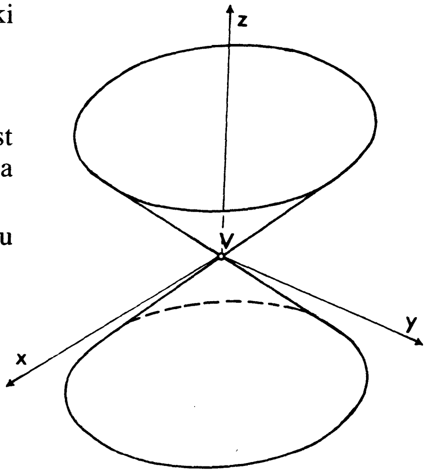
$$S = \left\{ (x, y, z) \in E^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} \right\}$$

nije ploha jer je $\mathrm{d}F=0$ u točki $V=(0,\,0,\,0)$.

Skup:

$S \setminus \{\text{Vrh stošca, tj. } V=(0,\,0,\,0)\}$ jest ploha, jer je $\mathrm{d}F \neq 0$ u svim točkama toga skupa.

Skup $S \setminus \{V\}$ dopušta parametrizaciju $D \to S \setminus \{V\}$ danu sa:



Sl. 33.

$$x = a\,u \cos v$$
$$y = a\,u \sin v$$
$$z = c\,u,$$

gdje je $D = R \times [0{,}2\pi]$.

Pokažite da je $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ na skupu $S \setminus \{V\}$.

U točki $V=(0,\,0,\,0)$, tj. $u=0$ bilo bi $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \vec{0}$, dakle bi $V=(0,\,0,\,0)$ bila singularna točka parametarske mreže, no singularne točke isključujemo iz razmatranja.

U zadacima 209. i 210. koordinatne u i v linije znače meridijane, koji su izvodnice valjka odnosno stošca, i paralele. Par $(u,\,v)$ znači Gaussove koordinate.

211. Zadana je ploha parametarskim jednadžbama

$$x = a \cos^3 u \cos^3 v$$
$$y = a \cos^3 u \sin^3 v$$
$$z = a \sin^3 u,$$
$$u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad v \in [-\pi,\,\pi].$$

Naći implicitnu jednadžbu te plohe.
Kako je:

$$\sqrt[3]{\frac{x}{a}} = \cos u \cos v$$

$$\sqrt[3]{\frac{y}{a}} = \cos u \sin v$$

$$\sqrt[3]{\frac{z}{a}} = \sin u,$$

to je:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{x}{a}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{\frac{y}{a}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{\frac{z}{a}}\right)^2 = \cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u = 1.$$

Implicitna jednadžba zadane plohe prema tome glasi:

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} = \sqrt[3]{a^2}.$$

212. Dokazati da ploha dana parametarskim jednadžbama:

$$x = a\,\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}$$

$$y = b\,\frac{2u}{u^2+v^2+1}$$

$$z = c\,\frac{2v}{u^2+v^2+1}, \qquad u, v \in \mathbf{R}$$

predstavlja elipsoid.

Imamo:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{u^4+v^4+1+2u^2v^2-2u^2-2v^2}{(u^2+v^2+1)^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{4u^2}{(u^2+v^2+1)^2}$$

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{4v^2}{(u^2+v^2+1)^2},$$

pa je:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{u^4+v^4+1+2u^2v^2+2u^2+2v^2}{(u^2+v^2+1)^2} = \frac{(u^2+v^2+1)^2}{(u^2+v^2+1)^2} = 1,$$

što predstavlja elipsoid.

213. Zadano je preslikavanje $E^2 \to E^3$ sa:

$$x = 2u + v$$

$$y = 4u^2 + 4uv + v^2$$

$$z = e^{2u} e^v.$$

Ispitati da li je skup:

$$S = \{(x, y, z) \in E^3 : x = 2u + v, \quad y = 4u^2 + 4uv + v^2, \quad z = e^{2u} e^v\}$$

ploha.

Najprije, to je preslikavanje diferencijabilno, još mora biti ispunjen uvjet $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ ili što je isto rang matrice (7) mora biti dva. Ispitajmo rang matrice:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4(2u+v) & 2e^{2u}e^v \\ 1 & 2(2u+v) & e^{2u}e^v \end{vmatrix}.$$

Ova matrica nema rang dva, nego joj je rang jedan, za svako u i v. To znači da su vektori:

$$\vec{r}_u = \{2,\ 4(2u+v),\ 2e^{2u}e^{v}\}$$
$$\vec{r}_v = \{1,\ 2(2u+v),\ e^{2u}e^{v}\}$$

kolinearni.

Prema tome S nije ploha.

214. Za plohu zadanu eksplicitnom jednadžbom (9) naći vektorsku jednadžbu.

Zadana je ploha:

$$z = f(x,\ y).$$

Stavimo li za parametra: $x = x,\ y = y,\ z = f(x,\ y)$ tada vektorska jednadžba glasi:

$$\vec{r}(x,\ y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + f(x,\ y)\,\vec{k}, \qquad x,\ y \in \mathbf{R}.$$

ili:

Stavimo li za parametre $x = u,\ y = v,\ z = f(u,\ v)$ tada vektorska jednadžba glasi:

$$\vec{r}(u,\ v) = u\,\vec{i} + v\,\vec{j} + f(u,\ v)\,\vec{k}, \qquad u,\ v,\ \in \mathbf{R}.$$

215. U ravnini XOZ zadana je krivulja $\alpha : I \to E^3$

1° $$z = f(x), \quad x \in I$$

2° $$x = g(u), \quad y = 0, \quad z = h(u), \quad u \in I.$$

a) Napisati parametarske jednadžbe plohe koja nastaje rotacijom krivulje α oko osi OZ.

b) Napisati vektorsku jednadžbu tako nastale rotacione plohe.

c) Što su koordinatne krivulje $u = C,\ v = C$? Koje je geometrijsko značenje parametara u i v?

1° Eksplicitna jednadžba rotacione plohe glasi (vidi sl. 34):

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

a parametarske jednadžbe:

$$x = u\cos v$$
$$y = u\sin v$$
$$z = f(u), \quad u \in I, \quad v \in [0,\ 2\pi],$$

ili općenitije:

$$x = g(u)\cos v$$
$$y = g(u)\sin v$$
$$z = f(g(u)) = h(u),\ u \in I,$$
$$v \in [0,\ 2\pi],$$

gdje je $g: I \to \mathbf{R}$ bilo koja diferencijabilna funkcija.

2° Jednadžba rotacione plohe glasi:

$$\sqrt{x^2+y^2} = g(u), \quad z = h(u),$$

a njena parametarska jednadžba:

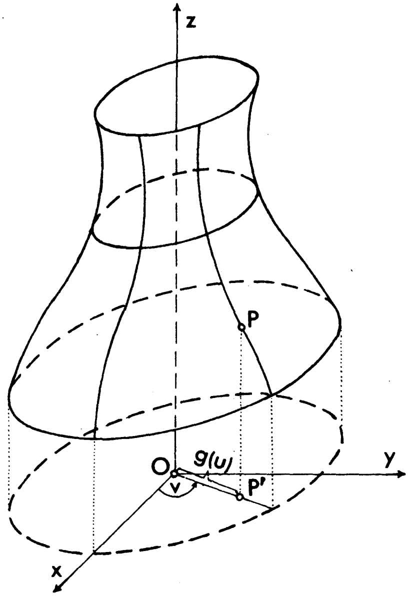
$$x = g(u)\cos v$$
$$y = g(u)\sin v$$
$$z = h(u), \quad u \in I, \quad v \in [0, 2\pi].$$

Vektorska se jednadžba rotacione plohe može još napisati u obliku:

$$\vec{r}(u, v) = g(u)\vec{e}(v) + h(u)\vec{k},$$

gdje je $\vec{e}(v)$ normirana vektorska funkcija

$$\vec{e}(v) = \cos v\,\vec{i} + \sin v\,\vec{j}.$$



Sl. 34.

Koordinatne krivulje jesu:

za $u = \text{const.}$ $\quad v$ krivulje se zovu paralele,
za $v = \text{const.}$ $\quad u$ krivulje se zovu meridijani.

Parametri u i v geometrijski znače Gaussove koordinate.
Ploha nije jednostavna.

216. Naći parametarske jednadžbe ravnine i njezinu vektorsku jednadžbu. Što predstavlja koordinatna mreža krivulja te ravnine?

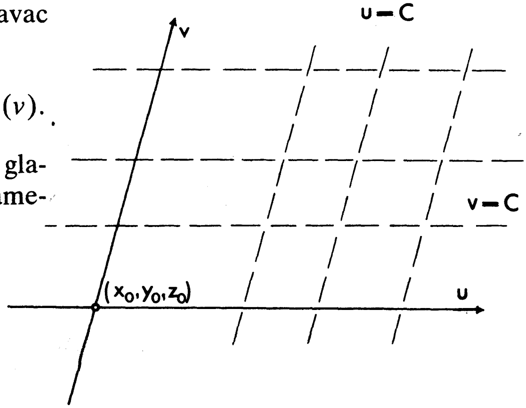
Točkom (x_0, y_0, z_0) postavimo pravac (vidi sl. 35):

$$\frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{m_1} = \frac{z-z_0}{n_1} \qquad (u)$$

Istom točkom postavimo drugi pravac (nekolinearan s prvim):

$$\frac{x-x_0}{l_2} = \frac{y-y_0}{m_2} = \frac{z-z_0}{n_2} \qquad (v).$$

Parametarske jednadžbe tih pravaca glase, označimo li kod prvog pravca parametar sa u, a kod drugoga sa v:



Sl. 35.

$$x = x_0 + l_1 u, \quad \text{odnosno} \quad x = x_0 + l_2 v$$
$$y = y_0 + m_1 u, \qquad\qquad y = y_0 + m_2 v$$
$$z = z_0 + n_1 u, \quad u \in \mathbf{R} \qquad z = z_0 + n_2 v \quad v \in \mathbf{R}$$

Tada će

$$\begin{aligned} x &= x_0 + l_1 u + l_2 v \\ y &= y_0 + m_1 u + m_2 v, \\ z &= z_0 + n_1 u + n_2 v, \qquad u, v \in \mathbf{R} \end{aligned} \tag{1}$$

biti parametarske jednadžbe ravnine. Za $v = 0$ dobivamo početni prvi pravac (u), a za $u = 0$ drugi (v). Za razne vrijednosti od u i v dobivamo pravce koji su paralelni s polaznim pravcima. Ovi pravci predstavljaju prema tome koordinatne krivulje – pravce u ravnini i čine mrežu pravaca u ravnini. Polazni pravci (u) i (v) predstavljaju koordinatne osi kosokutnog koordinatnog sustava te ravnine.

Ravnina je jednostavna ploha.

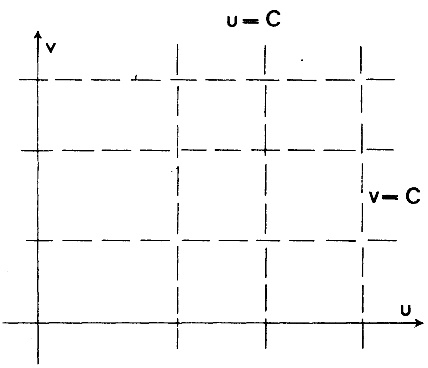
Vektorska jednadžba ravnine glasi:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}\,u + \vec{b}\,v,$$

gdje je $\vec{r}_0$ radijvektor početne točke ili ishodišta O′ kosokutnog koordinatnog sustava, a vektori $\vec{a}(l_1, m_1, n_1)$ i $\vec{b}(l_2, m_2, n_2)$ jesu koordinatni vektori koordinatnog sustava te ravnine (kolinearni sa zadana dva pravca).

Specijalni slučaj:

a) Promotrimo parametrizaciju ravnine definiranu jednadžbama (vidi sl. 36):



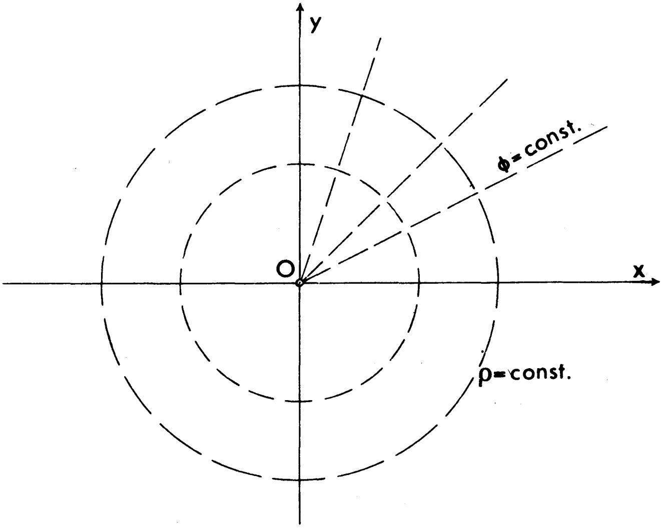
$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= 0, \qquad u, v \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Ovdje su koordinatne osi zadane svojim jediničnim vektorima $\vec{u}(1, 0, 0)$ i $\vec{v}(0, 1, 0)$ i prolaze ishodištem 0 koordinatnog sustava XOY.

Sl. 36.

b) Uzmemo li u ravnini XOY polarne koordinate tada njene parametarske jednadžbe možemo pisati ovako (vidi sl. 37):

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \phi \\ y &= \varrho \sin \phi \\ z &= 0. \end{aligned}$$



Sl. 37.

To je parametrizacija skupa $XOY \setminus \{\text{ishodište}\}$.

217. Naći parametarske jednadžbe ravnine

$$3x + 4y + 6z - 20 = 0.$$

Treba ravninu predočiti u obliku (1) iz zad. 216.

Prvi način:

Uzmimo po volji funkcije $x,\ y : E^2 \to \mathbf{R}$ ovako:

$$x = -2 + 3u - v$$
$$y = 1 - 2u + 3v,$$

što uvršteno u jednadžbu zadane ravnine daje:

$$z = \frac{7}{3} - \frac{1}{6}u - \frac{3}{2}v, \qquad z : E^2 \to \mathbf{R}.$$

Jednadžbe:

$$x = -2 + 3u - v$$
$$y = 1 - 2u + 3v$$
$$z = \frac{7}{3} - \frac{1}{6}u - \frac{3}{2}v$$

predstavljaju tada parametarske jednadžbe tražene ravnine. Vidimo zaista da točka $O' = \left(-2,\ 1,\ \frac{7}{3}\right)$ leži u zadanoj ravnini. Ta točka je ishodište traženog kosokutnog sustava u ravnini s osima:

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-\frac{7}{3}}{-\frac{1}{6}} \qquad (u)$$

za $v=0$ i

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-\frac{7}{3}}{-\frac{3}{2}} \qquad (v)$$

za $u=0$.

Drugi način:
Opet uzmemo po volji

$$x= -2+3u-v$$
$$y=1-2u+3v.$$

Najprije, točka $A=(-2,\ 1, z_0)$ leži u ravnini, što daje $z_0=\frac{7}{3}$. Nadalje, koordinatni vektori jesu $\vec{a}(3,-2,\ n_1)$ i $\vec{b}(-1,\ 3,\ n_2)$. Kako je vektor normale na zadanu ravninu $\vec{N}(3,\ 4,\ 6)$, to iz uvjeta

$$\vec{N}\cdot\vec{a}=0,$$
$$\vec{N}\cdot\vec{b}=0$$

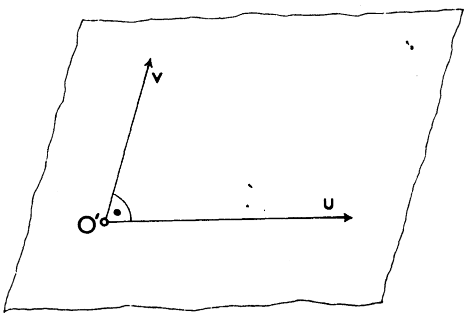
izlazi $n_1=\frac{1}{6}$ i $n_2=-\frac{3}{2}$, dakle je

$$z=\frac{7}{3}-\frac{1}{6}u-\frac{3}{2}v.$$

218. Naći parametarske jednadžbe ravnine $3x+4y-2z-3=0$ i to tako, da su koordinatne krivulje dvije familije međusobno okomitih pravaca (vidi sl. 38).
Točku te ravnine odaberimo po volji kao ishodište $O'=(1,\ 2,\ 4)$ tog koordinatnog sustava ($x=1$, $y=2$ odaberemo po volji, što daje iz jednadžbe ravnine $z=4$).

Prvu koordinatnu os u odaberimo tako da leži u ravnini, tj. da prolazi točkom O' i da bude $\vec{N}\cdot\vec{u}=0$, gdje je $\vec{u}(6,-2,\ n_1)$ odabrano po volji, a $\vec{N}(3,\ 4,-2)$ vektor normale ravnine.
Navedeni uvjet daje $n_1=5$, pa je $\vec{u}(6,-2,\ 5)$

koordinatni vektor, a



Sl. 38.

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{5} \qquad (u)$$

jest koordinatna os u traženog koordinatnog sustava.

Potražimo i drugu koordinatnu os.

Ona mora također ležati u zadanoj ravnini, tj. prolaziti točkom O' i biti još k tome okomita na prvu os u. Moraju biti dakle zadovoljeni uvjeti:

$$\vec{N}\cdot\vec{v}=0$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0,$$

gdje je $\vec{v}(l_2, m_2, n_2)$. Dobijemo sustav jednadžbi:

$$3l_2+4m_2-2n_2=0$$
$$6l_2-2m_2+5n_2=0,$$

odnosno podijelivši npr. s n_2:

$$3\frac{l_2}{n_2}+4\frac{m_2}{n_2}=2$$

$$6\frac{l_2}{n_2}-2\frac{m_2}{n_2}=-5.$$

Rješenja su:

$$l_2=-\frac{8}{15}n_2, \qquad m_2=\frac{9}{10}n_2.$$

Jednadžba pravca v glasi:

$$\frac{x-1}{-\frac{8}{15}n_2}=\frac{y-2}{\frac{9}{10}n_2}=\frac{z-4}{n_2},$$

odnosno:

$$\frac{x-1}{-16}=\frac{y-2}{27}=\frac{z-4}{30} \qquad (v).$$

Prema tome tražene parametarske jednadžbe glase:

$$x=1+6u-16v$$
$$y=2-2u+27v$$
$$z=4+5u+30v, \qquad u,\ v\in\mathbf{R}.$$

(Vidi zad. 244.)

219. Napisati parametarske jednadžbe *pseudosfere* koja nastaje rotacijom traktrise:

$$y=\frac{a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-x^2}$$

oko svoje asimptote, tj. osi OY (vidi sl. 39).

Traktrisa je evolventa lančanice čija je jednadžba (u ovom slučaju)

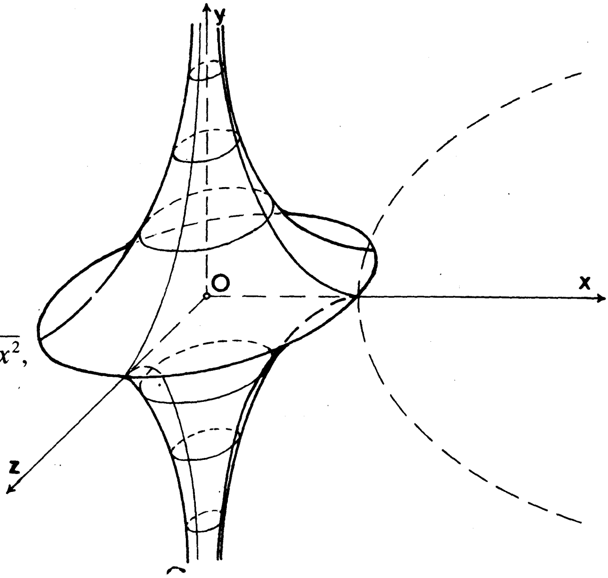
$$x = a \operatorname{ch} \frac{y}{a}$$

Jednadžba traktrise još se može napisati u obliku:

$$y = a \ln \frac{a \pm \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \pm \sqrt{a^2 - x^2},$$

ili

$$y = a \operatorname{Ar\,ch} \frac{a}{x} \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$



Sl. 39.

Jednadžba pseudosfere tada glasi:

$$y = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - (x^2 + z^2)}}{\sqrt{x^2 + z^2}} - \sqrt{a^2 - (x^2 + z^2)},$$

(uzevši gornje predznake).

Stavimo li:

$$x = a \cos v \sin u$$
$$z = a \sin v \sin u$$

dobivamo:

$$y = -a\left[\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u\right],$$

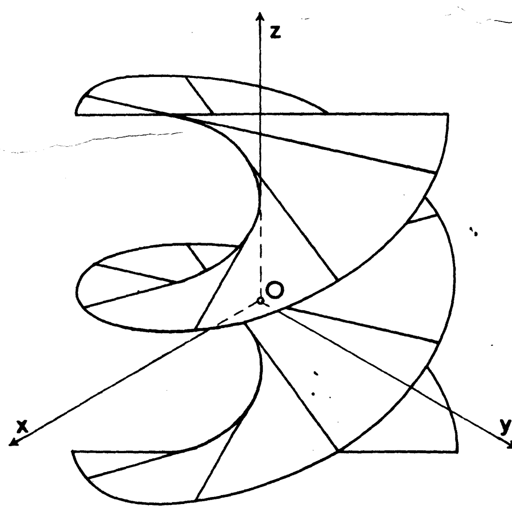
$$u \geqslant 0, \qquad v \in [0, 2\pi],$$

pa parametarske jednadžbe pseudosfere glase:

$$x = a \cos v \sin u$$

$$y = -a \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} - a \cos u$$

$$z = a \sin v \sin u.$$



Sl. 40.

220. Napisati parametarske i eksplicitnu jednadžbu *helikoida*. Helikoid je zavojna ploha koja nastaje rotacijom bilo kojeg pravca (profil) oko neke osi, koju taj pravac siječe pod pravim kutem (vidi sl. 40).

Pritom se pravac istovremeno jednoliko kreće u smjeru te osi. Brzine obiju kretanja su proporcionalne (vidi zad. 151).

Ova je ploha ujedno i geometrijsko mjesto svih glavnih normala zavojnice na valjku.

Parametarske jednadžbe helikoida glase:

$$x = au\cos v$$
$$y = au\sin v$$
$$z = bv, \qquad u,\ v \in \mathbf{R},$$

Eliminiravši parametre u i v dobijemo jednadžbu helikoida:

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\frac{z}{b}.$$

221. Napisati parametarske jednadžbe *katenoida* koji se dobije rotacijom lančanice

$$x = a\,\mathrm{ch}\,\frac{z}{\mathrm{a}},$$

oko osi OZ (vidi sl. 41).

a) Jednadžba katenoida glasi:

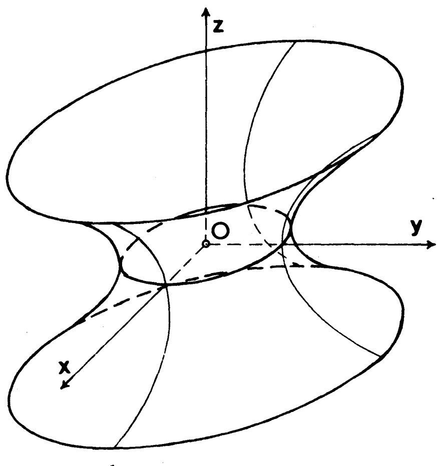
$$\sqrt{x^2+y^2} = a\,\mathrm{ch}\,\frac{z}{a}.$$

Stavimo li $z = u$ dobijemo parametarske jednadžbe katenoida:

$$x = a\,\mathrm{ch}\,\frac{u}{a}\cos v$$

$$y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{u}{a}\sin v$$

$$z = u, \qquad u \in \mathbf{R}, \qquad v \in [0,\ 2\,\pi].$$



Sl. 41.

b) *2. način*

Jednadžbu lančanice možemo napisati i u parametarskom obliku ovako:

U jednadžbi $z = a\,\mathrm{arch}\,\dfrac{x}{a}$.

Uvedimo parametar ovako:

$$x = \sqrt{u^2+a^2}, \text{ pa je } z = a\,\mathrm{arch}\,\frac{\sqrt{u^2+a^2}}{a} = a\ln\frac{\sqrt{u^2+a^2}+u}{a}.$$

Parametarske jednadžbe lančanice tada glase:

$$x = \sqrt{u^2+a^2}, \qquad y = 0, \qquad z = a\ln\frac{u+\sqrt{u^2+a^2}}{a}, \qquad u \in \mathbf{R}.$$

Parametarske jednadžbe katenoida glase prema zad. 215. 2°:

$$x = \sqrt{u^2 + a^2} \cos v$$
$$y = \sqrt{u^2 + a^2} \sin v$$

$$z = a \ln \frac{u + \sqrt{u^2 + a^2}}{a}, \qquad u \in \mathbf{R}, \qquad v \in [0, 2\pi].$$

222. Napisati parametarske jednadžbe torusa koji nastaje rotacijom kruga radiusa r oko pravca koji leži u ravnini toga kruga na udaljenosti $R\,(R > r)$ od njegova središta.

Neka torus nastaje rotacijom kruga

$$(y - R)^2 + z^2 = r^2, \ (R > r)$$

oko osi OZ.

Tada je implicitna jednadžba torusa (vidi sl. 42):

$$(\sqrt{y^2 + x^2} - R)^2 + z^2 = r^2.$$

Parametarske jednadžbe dobit ćemo stavimo li:

$$x = u \cos v$$
$$y = u \sin v$$

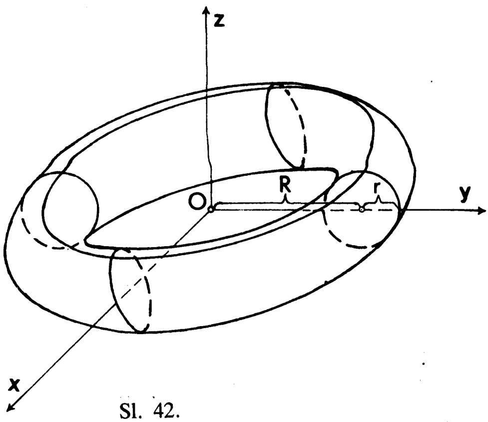
što daje

$$(u - R)^2 + z^2 = r^2$$

ili

$$z = \sqrt{r^2 - (u - R)^2}.$$

Parametarske jednadžbe torusa prema tome glase:



Sl. 42.

$$x = u \cos v$$
$$y = u \sin v$$

$$z = \sqrt{r^2 - (u - R)^2}, \qquad u \in \mathbf{R}, \qquad v \in [0, 2\pi],$$

a vektorska:

$$\vec{r} = \{ u \cos v, \ u \sin v, \ \sqrt{r^2 - (u - R)^2} \}, \qquad (R > r).$$

Još jedan oblik parametarskih odnosno vektorske jednadžbe torusa dobit ćemo stavimo li u prethodne parametarske jednadžbe, tj. u jednadžbu:

$$z = \sqrt{r^2 - (u - R)^2}$$

da je:

$$(u - R)^2 = r^2 \cos^2 u',$$

pa je tada

$$u = R + r \cos u',$$

gdje je u' novi parametar.

Tada imamo parametarske jednadžbe torusa s novim parametrom u':

$$x = (R + r\cos u')\cos v$$
$$y = (R + r\cos u')\sin v$$
$$z = r\sin u' \qquad (R > r), \qquad u', \qquad v \in [0, 2\pi],$$

odnosno vektorsku jednadžbu:

$$\vec{r} = \{ (R + r\cos u')\cos v, \qquad (R + r\cos u')\sin v, \quad r\sin u' \}, \qquad (R > r),$$

što je u skladu i sa zadatkom 215.

223. Zadana je ploha:

$$\vec{r} = \{ u\cos v, \quad u\sin v, \quad \sqrt{a^2 - u^2} \} \qquad u \in [-a, a], \qquad v \in [0, 2\pi],$$

gdje su u i v nezavisni parametri plohe, a »a« konstanta.

1° Napisati jednadžbu plohe u obliku $F(x, y, z) = 0$ i na osnovu toga zaključiti koja je to ploha.

2° Što su koordinatne u i v krivulje?

3° Kakvo je geometrijsko značenje parametara u i v?

1° Eliminacijom parametara u i v iz jednadžbi:

$$x = u\cos v$$
$$y = u\sin v$$
$$z = \sqrt{a^2 - u^2}$$

dobijemo jednadžbu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad (z > 0).$$

Ploha je gornja polusfera radiusa a.

2° $u = c$, v krivulja predstavlja krugove na sferi ($x = c\cos v$, $y = c\sin v$) na udaljenosti $z = \sqrt{a^2 - c^2}$ od ravnine XOY. Ti krugovi su paralele. Kako je $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg} v$, to su koordinatne u krivulje ($v = c$), veliki polukrugovi po kojima ravnine $y = x\operatorname{tg} c$ sijeku polusferu. To su meridijani.

3° u je udaljenost točke (u, v) na polusferi od osi OZ, a v je njena geografska dužina.

224. Zadana je ploha S parametrizacijom $D \to E^3$:

$$x = a\cos^4 u\cos^4 v, \qquad y = a\cos^4 u\sin^4 v$$
$$z = a\sin^4 u, \qquad D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \times [-\pi, \pi].$$

Napisati njenu implicitnu jednadžbu.

225. Pokazati da jednadžbe

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \qquad y = \frac{v}{u^2 + v^2}, \qquad z = \frac{1}{u^2 + v^2}, \qquad u \in \mathbf{R}, \qquad v \in \mathbf{R}$$

i

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = u^2, \qquad u \in \mathbf{R}, \qquad v \in [0, 2\pi],$$

predstavljaju parametarske jednadžbe iste plohe.

226. Pokazati da se parametarske jednadžbe jednoplošnog hiperboloida mogu napisati u obliku:

$$x = a\,\frac{uv+1}{u+v}, \qquad y = b\,\frac{u-v}{u+v}, \qquad z = \frac{uv-1}{u+v}, \qquad u \in \mathbf{R}, \qquad v \in \mathbf{R}.$$

Kakve su koordinatne krivulje plohe za tu parametrizaciju?

U zadacima od 227. do 233. napisati parametarske jednadžbe sljedećih ploha drugog reda:

227. elipsoida: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1,$

228. eliptičkog paraboloida: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z,$

229. jednoplošnog hiperboloida: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1,$

230. dvoplošnog hiperboloida $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1,$

231. eliptičkog valjka: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$

232. stošca: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = \dfrac{z^2}{c^2},$

233. hiperboličkog paraboloida: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z.$

234. Zadana je ploha:

$$x = u + v, \qquad y = u - v, \qquad z = uv, \qquad u \in \mathbf{R}, \qquad v \in \mathbf{R}.$$

Ispitati koja je to ploha i provjeriti leže li na njoj točke $A = (4, 2, 3)$ i $B = (1, 4, -2)$.

U zadacima od 235. do 237. odrediti koordinatne krivulje na plohi:

235. $x = u, \qquad y = v, \qquad z = u; \qquad u, v \in \mathbf{R}$

236. $x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = 0; \qquad u \in \mathbf{R}, \qquad v \in [0, 2\pi]$

237. $x = \cos u \operatorname{ch} v, \qquad y = \sin u \operatorname{sh} v, \qquad z = 0; \qquad u \in [0, 2\pi], \qquad v \in \mathbf{R}.$

238. Naći singularnu krivulju na pseudosferi:

$$x = \sin u \cos v, \qquad y = \sin u \sin v, \qquad z = \cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2};$$

$$u \geqslant 0, \qquad v \in [0, 2\pi].$$

(Singularna krivulja na plohi je ona, čije su sve točke singularne točke plohe.)

239. Zadana je ploha:

$$\vec{r}=\{\cos u\cos v,\ \cos u\sin v,\ \sin u\},\qquad u\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right],\qquad v\in[-\pi,\ \pi]$$

1° Napisati jednadžbu plohe u obliku $F(x,\ y,\ z)=0$ i zaključiti koja je to ploha.

2° Što su koordinatne krivulje tog predočenja plohe?

3° Kakvo je geometrijsko značenje parametara u i v?

240. Ploha S dana je jednadžbom:

$$\vec{r}=\{u\cos v,\quad u\sin v,\quad f(u)\},\qquad u\in\mathbf{R},\qquad v\in[0,\ 2\pi],$$

gdje su u i v nezavisni parametri, a $f(u)$ dana realna funkcija.

1° Pomoću koordinatnih krivulja tog predočenja zaključiti koja je to ploha.

2° Napisati jednadžbu te plohe u obliku $z=f(x,\ y)$.

241. Zadana je ploha:

$$\vec{r}=\{e^{av}f(u)\cos(u+v),\quad e^{av}f(u)\sin(u+v),\ e^{av}g(u)\},\quad u,\ v\in\mathbf{R},$$

$f(u)$ i $g(u)$ proizvoljne funkcije.

Pokazati da koordinatne krivulje $u=c$ leže na stošcu

$$x^2+y^2=\frac{f^2(c)}{g^2(c)}\,z^2.$$

U zadacima 242. i 243. objasniti koja je ploha zadana sljedećim jednadžbama:

242. $\vec{r}=\{(a+b\cos u)\cos v,\ \ (a+b\cos u)\sin v,\quad b\sin u\},\qquad a>b,$

$$u,\ v\in[0,\ 2\pi].$$

243. $\vec{r}=\left\{\frac{1}{c}\sqrt{c^2+u^2}\cos v,\ \ \frac{1}{c}\sqrt{c^2+u^2}\sin v, u\right\},\qquad u\in\mathbf{R},\qquad v\in[0,\ 2\pi].$

244. Naći parametarske jednadžbe ravnine $x-3y+2z-9=0$.

Rješenja

224. $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$.

225. Rotacioni paraboloid: $z = x^2 + y^2$.

226. Čine pravolinijsku mrežu.

227. $x = a \sin u \cos v, \quad y = b \sin u \sin v, \quad z = c \cos u, \quad u \in [0, \pi], \ v \in [-\pi, \pi]$.

228. $x = au \cos v, \quad y = bu \sin v, \quad z = u^2, \quad u \in \mathbf{R}, \ v \in [0{,}2\pi]$.

229. $x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = b \operatorname{ch} u \sin v, \quad z = c \operatorname{sh} u, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0{,}2\pi]$.

230. $x = a \operatorname{sh} u \cos v, \quad y = b \operatorname{sh} u \sin v, \quad z = c \operatorname{ch} u, \ u \in \mathbf{R}, \ v \in [0{,}2\pi]$,

231. $x = a \cos v, \quad y = b \sin v, \quad z = u, \ u \in \mathbf{R}, \ v \in [0{,}2\pi]$,

232. $x = au \cos v, \quad y = bu \sin v, \quad z = cu, \ u \in \mathbf{R}, \ v \in [0{,}2\pi]$,

233. $x = au \operatorname{ch} v, \quad y = bu \operatorname{sh} v, \quad z = \frac{1}{2} u^2, \quad u, v \in \mathbf{R}$.

234. Ploha je hiperbolički paraboloid $x^2 - y^2 = 4z$, A – leži, B – ne leži.

235. Dvije familije paralelnih pravaca obje paralelne s koordinatnim osima.

236. Zrake koje izlaze iz ishodišta, i familija koncentričnih kružnica sa središtem u ishodištu.

237. Krivulje $v = \text{const.}$ – familija elipsi s istim fokusima i odrezak $[-1, 1]$ na osi OX; krivulje $u = \text{const.}$ – familija hiperbola istih fokusa i odresci $(-\infty, -1]$ i $[1, \infty)$ na osi OX.

238. $u = \frac{\pi}{2}$.

239. 1° $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, što je sfera. 2° $u = c$ su paralele, tj. krugovi na sferi u udaljenosti $z = \sin c$ od ravnine XOY. $v = c$ su meridijani, tj. veliki krugovi na sferi koji nastaju kao presjek sfere i ravnine $y = x \operatorname{tg} c$. 3° u i v su geografske koordinate.

240. $u = c$ predstavlja krugove sa središtem na osi OZ. Ploha je prema tome rotaciona, a nastaje rotacijom krivulje $z = f(x)$, $y = 0$, oko osi OZ. 2° $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

241. eliminirati parametar v.

242. Prema zad. 215. i 222. to je rotaciona ploha koja nastaje rotacijom krivulje $x = a + b \cos u$, $y = 0$, $z = b \sin u$, $u \in [0{,}2\pi]$, dakle, kružnice $(x - a)^2 + z^2 = b^2$, oko osi OZ. Ploha je prema tome torus s jednadžbom $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$.

243. Prema zad. 215. to je ploha nastala rotacijom krivulje:

$$x = \frac{1}{c} \sqrt{u^2 + c^2}, \ y = 0, \ z = u, \text{ dakle hiperbole } x^2 - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

oko osi OZ. Ploha je, dakle, rotacioni jednoplošni hiperboloid s jednadžbom:

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

244. $x = 1 + 2u - 2v, \quad y = 2 + 3u + 4v, \quad z = 4 + 9u + 5v, \quad u, v \in \mathbf{R}$.